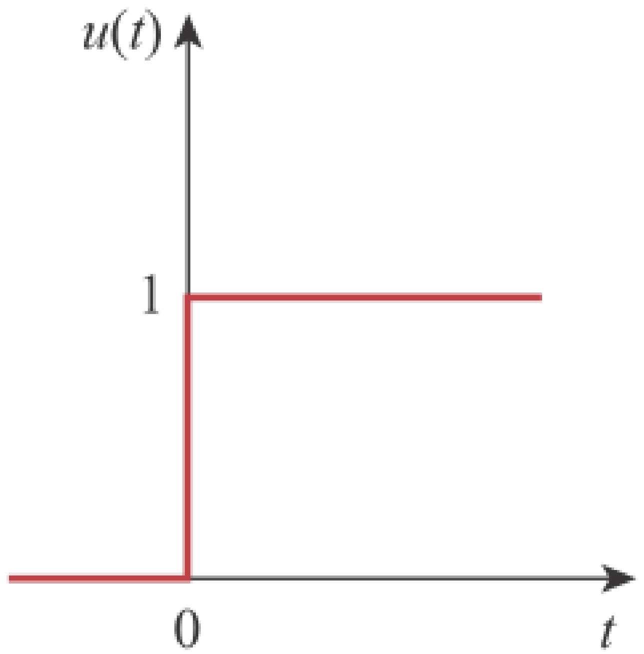
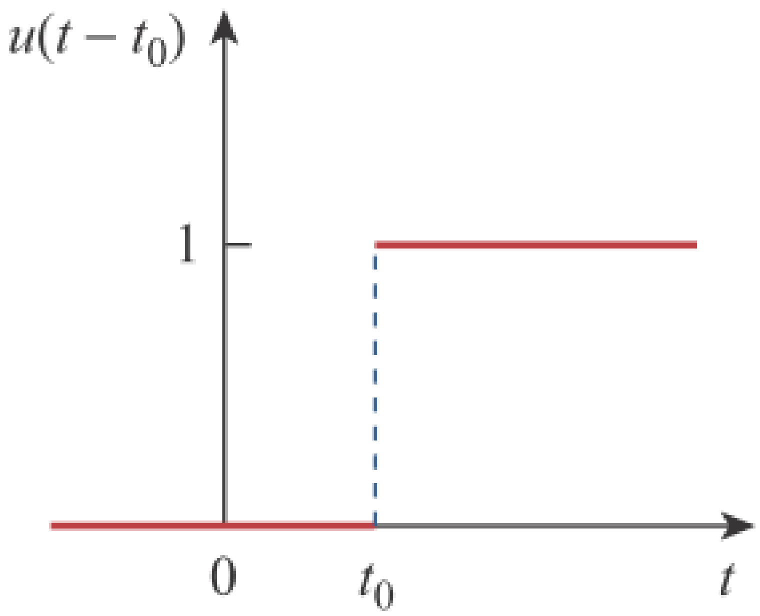
Tekillik Fonksiyonları

Tekillik fonksiyonları, süreksiz veya türevleri süreksiz olan fonksiyonlardır.

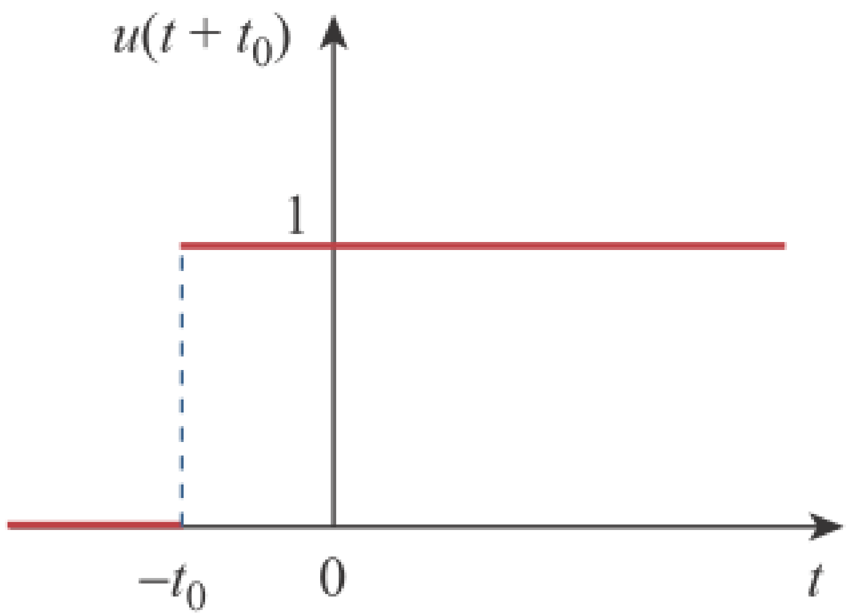


$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Birim Basamak Fonksiyonu

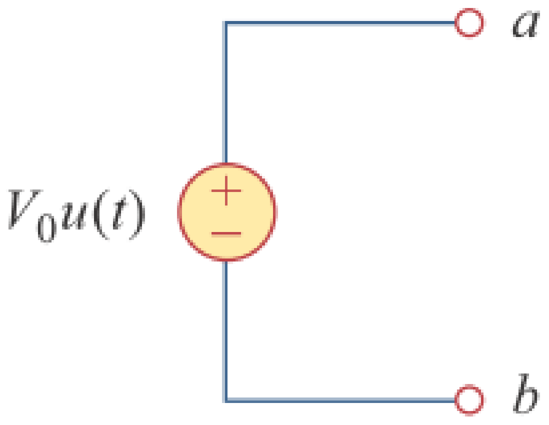


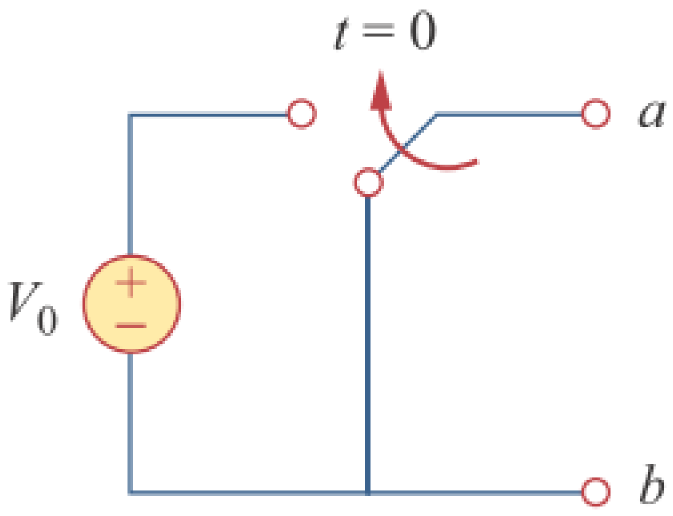
$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$



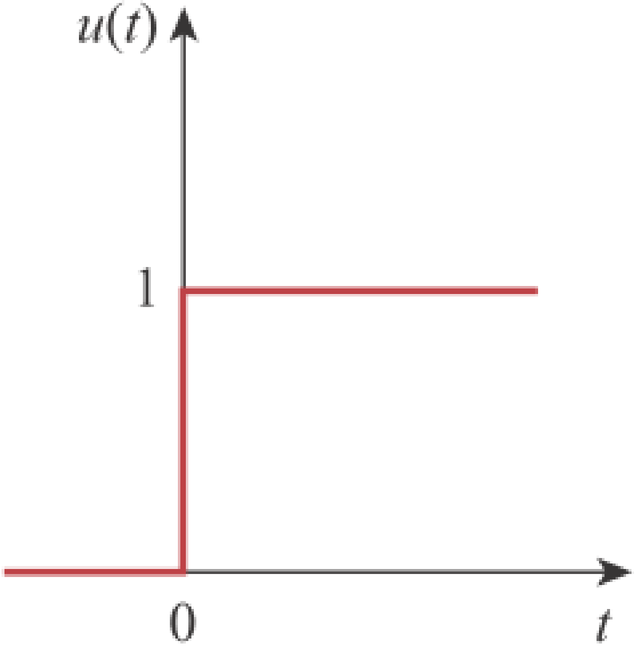
$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t < -t_0 \\ 1, & t > -t_0 \end{cases}$$

Birim Basamak Fonksiyonu

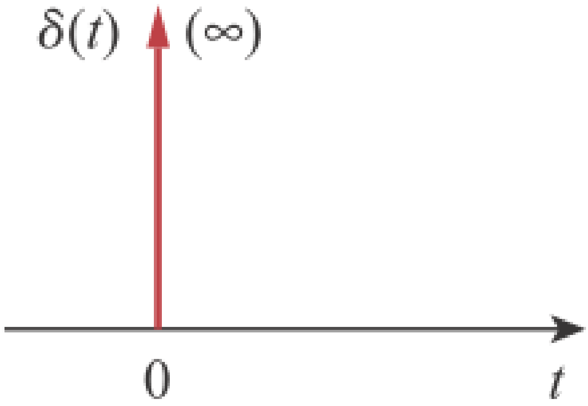




Birim Darbe (Impulse) Fonksiyonu



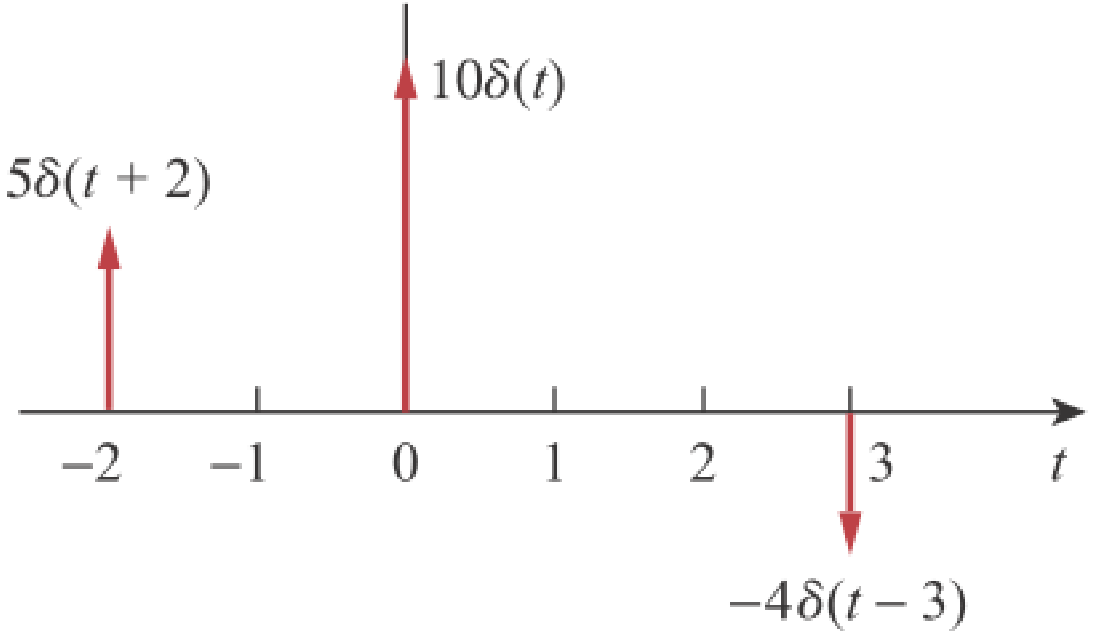
$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{Undefined}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$



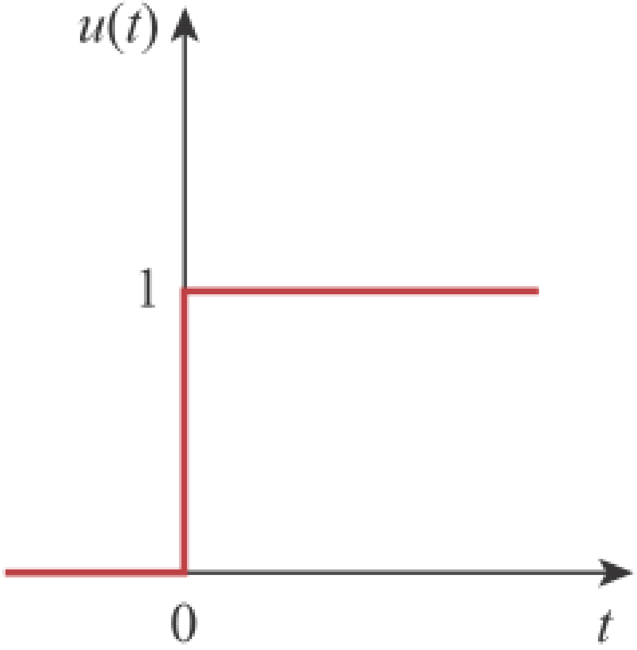
Birim Darbe (Impulse) Fonksiyonu

Birim darbe fonksiyonu $\delta(t)$, $t = 0$ haricinde her yerde 0'dır. $t = 0$ aninda ise tanımsızdır

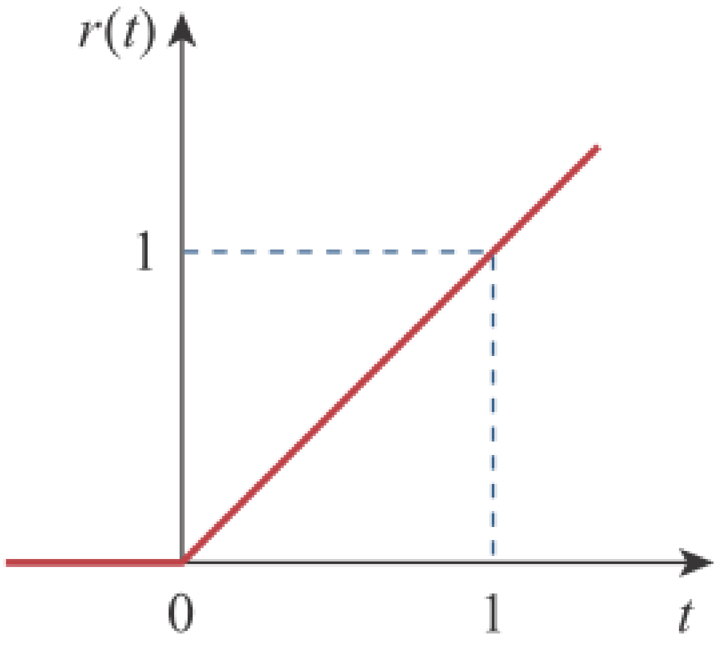
$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$



Birim Rampa Fonksiyonu

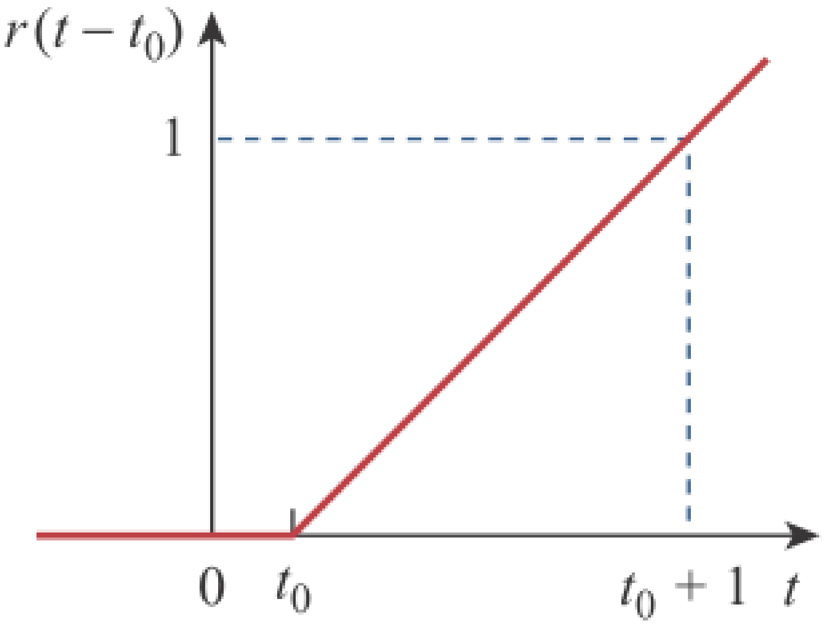


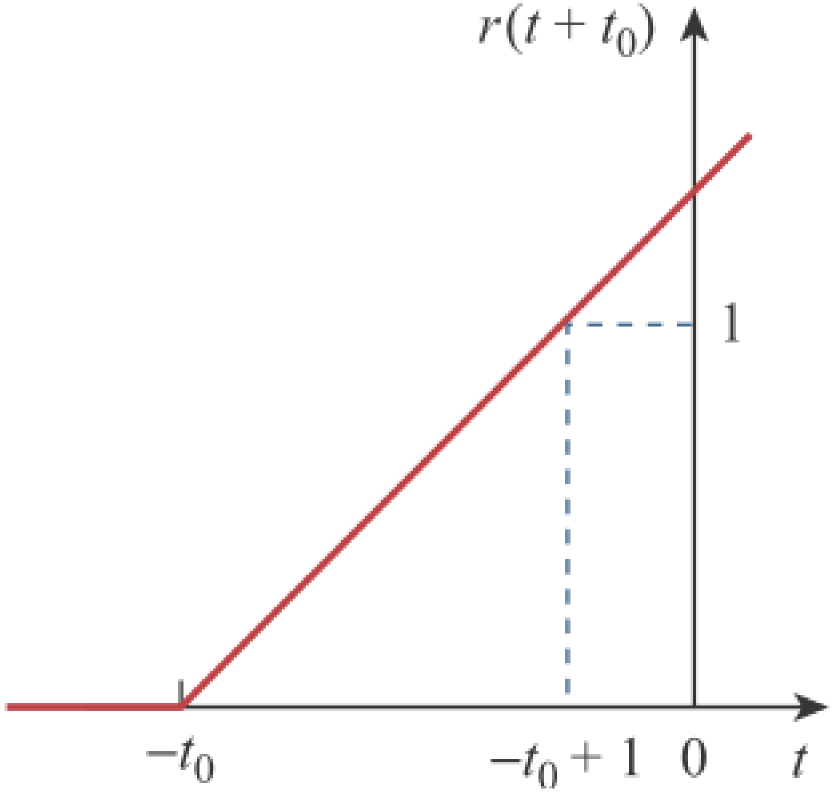
$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)\,dt = tu(t)$$



$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

Birim Rampa Fonksiyonu

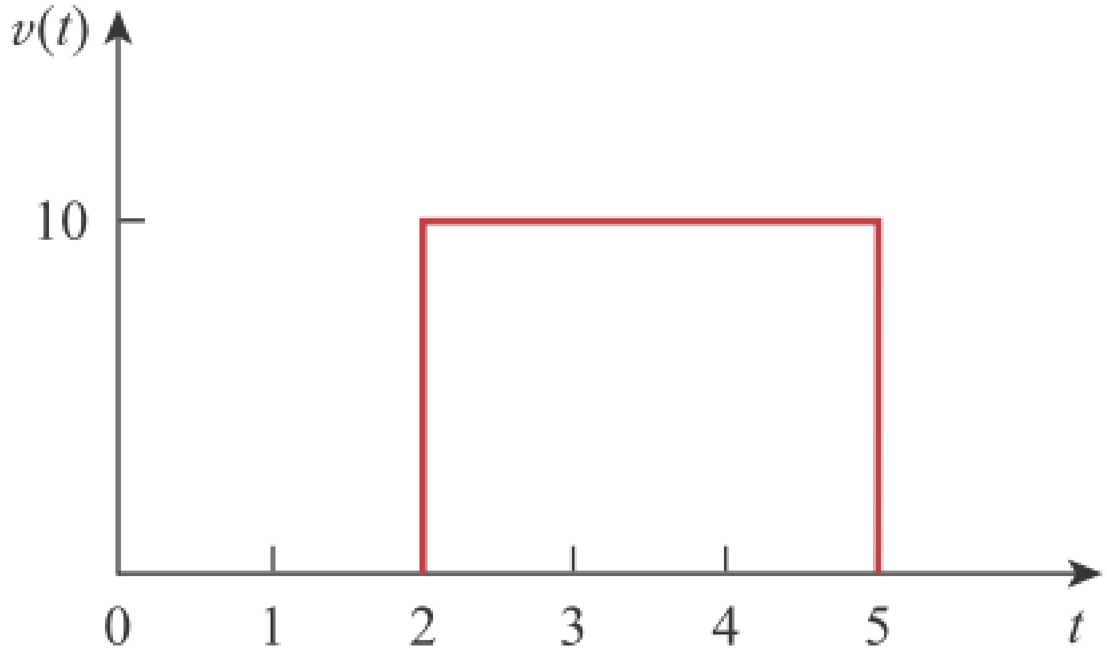




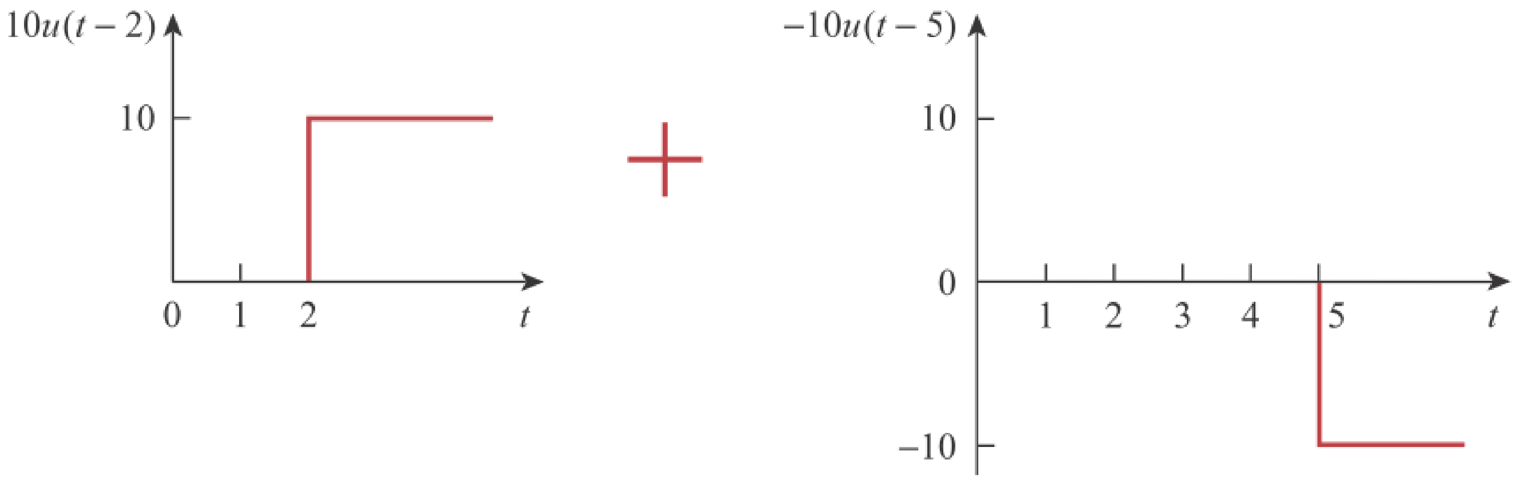
$$r(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\leq t_0\\ t-t_0, & t\geq t_0\end{cases}\qquad r(t+t_0)=\begin{cases}0, & t\leq -t_0\\ t+t_0, & t\geq -t_0\end{cases}$$

Tekillik Fonksiyonları

Soru: Grafikte verilen voltaj sinyalini birim basamak fonksiyonu ile ifade ediniz. Bulduğunuz fonksiyonun türevini alınız ve grafiğini çiziniz.

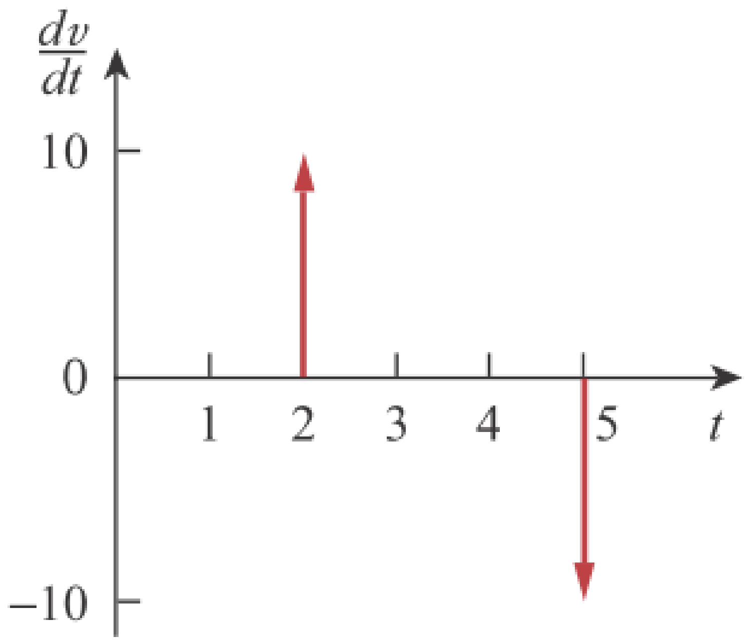


Tekillik Fonksiyonları



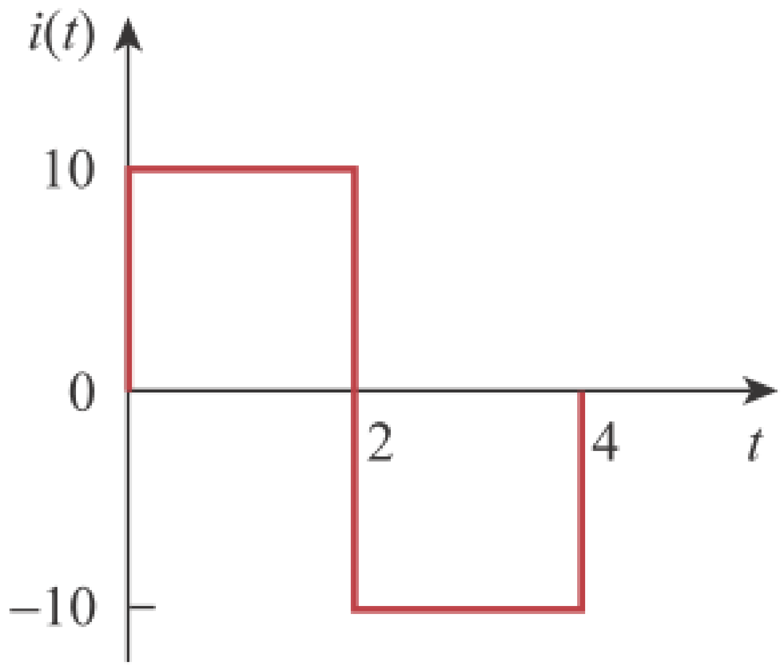
$$v(t) = 10u(t-2) - 10u(t-5) = 10[u(t-2) - u(t-5)]$$

$$\frac{dv}{dt} = 10[\delta(t-2) - \delta(t-5)]$$



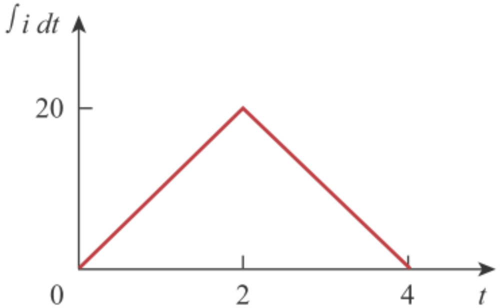
Tekillik Fonksiyonları

Ödev: Grafikte verilen voltaj sinyalini birim basamak fonksiyonu ile ifade ediniz. Bulduğunuz fonksiyonun integralini alınız ve grafiğini çiziniz.

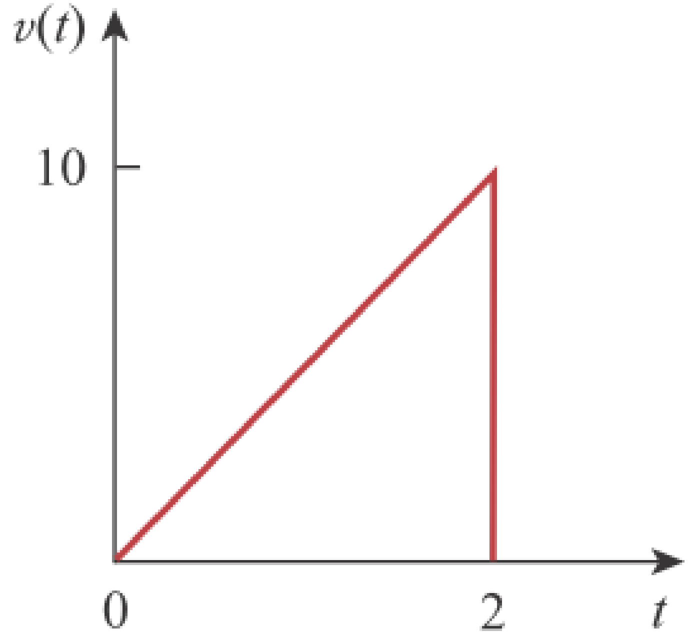


$$10[u(t) - 2u(t-2) + u(t-4)]$$

$$10[r(t) - 2r(t-2) + r(t-4)]$$

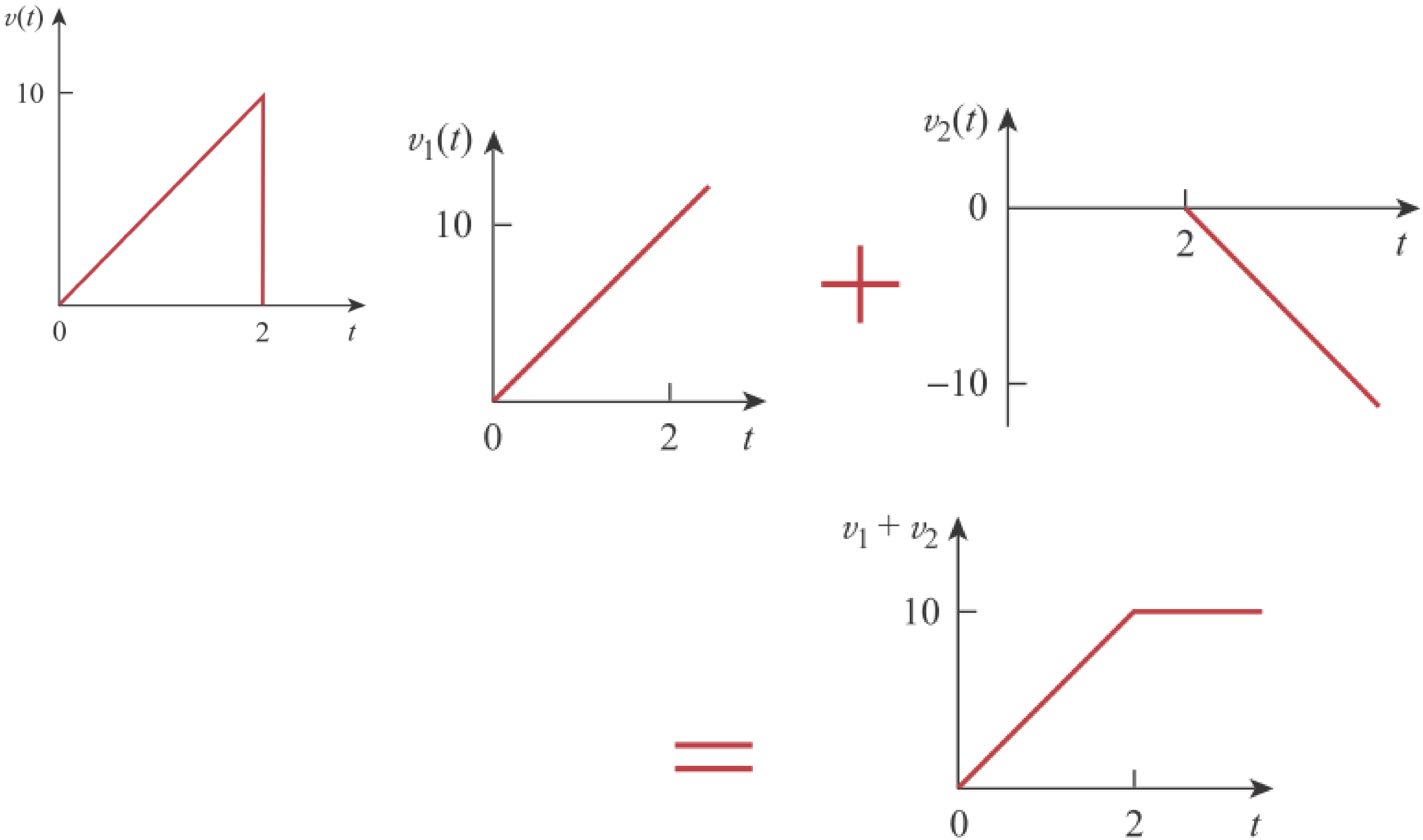


Soru: Verilen testere dişi fonksiyonunu tekillik fonksiyonları ile ifade ediniz.

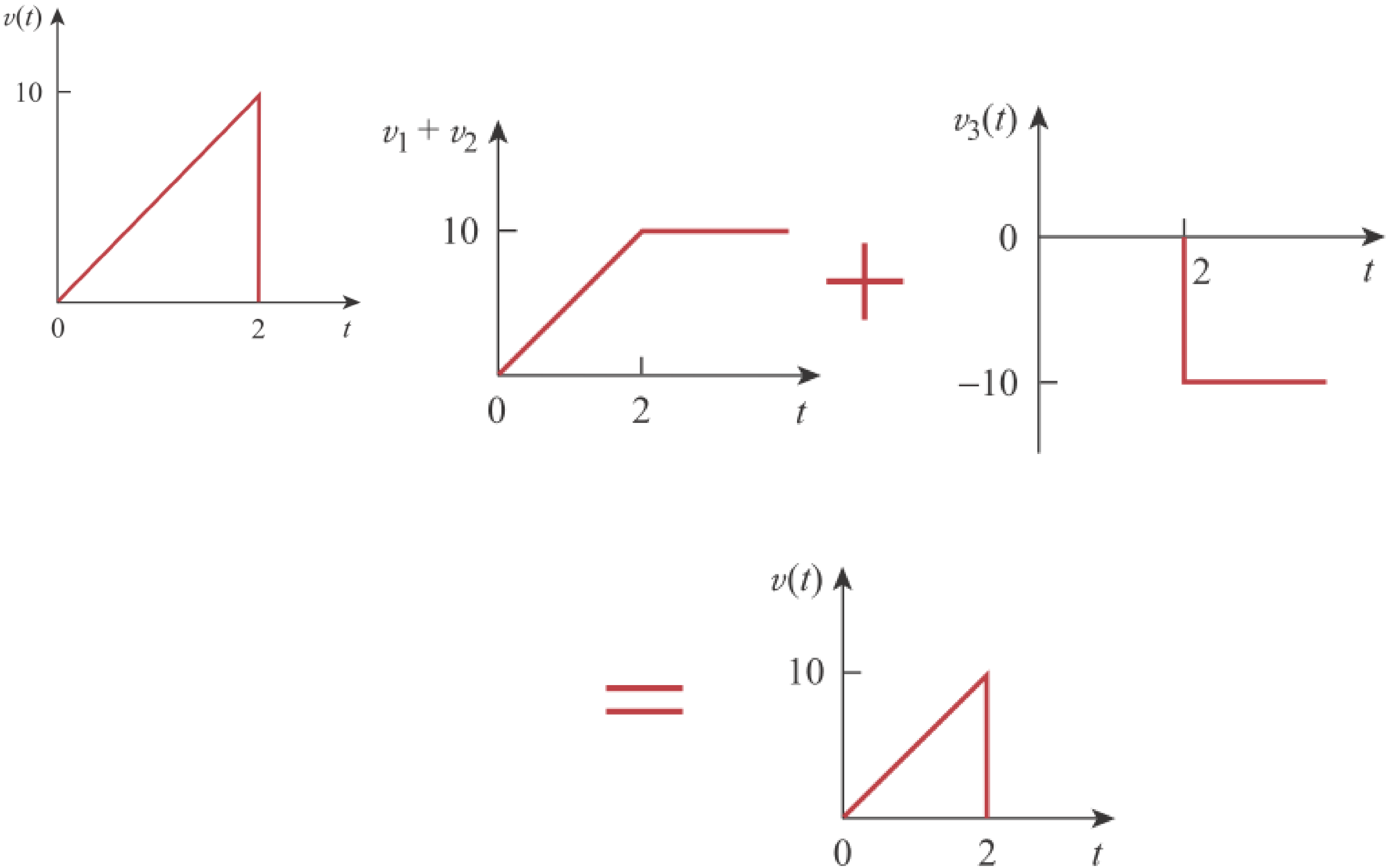


$$\begin{aligned} v(t) &= 5t[u(t) - u(t-2)] \\ &= 5tu(t) - 5tu(t-2) \\ &= 5r(t) - 5(t-2+2)u(t-2) \\ &= 5r(t) - 5(t-2)u(t-2) - 10u(t-2) \\ &= 5r(t) - 5r(t-2) - 10u(t-2) \end{aligned}$$

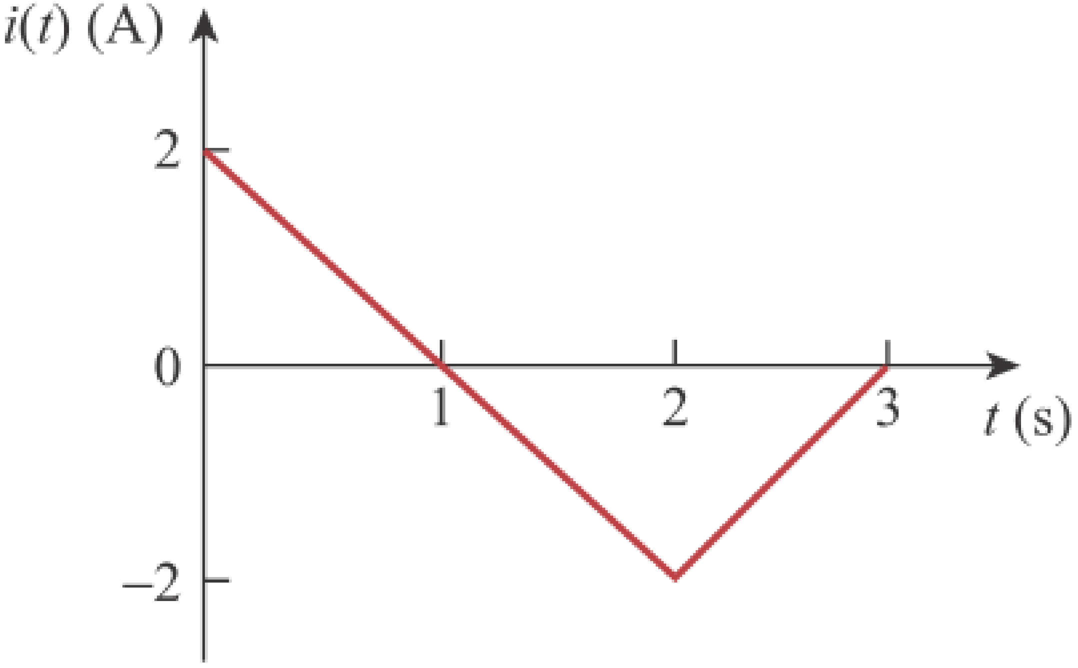
Tekillik Fonksiyonları



Tekillik Fonksiyonları



Ödev: Verilen testere dişi fonksiyonunu tekillik fonksiyonları ile ifade ediniz.



$$2u(t) - 2r(t) + 4r(t-2) - 2r(t-3).$$

Soru: Verilen fonksiyonu basamak ve rampa fonksiyonları ile ifade ediniz.

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t < 0 \\ -2, & 0 < t < 1 \\ 2t - 4, & t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= 3u(-t) - 2[u(t) - u(t-1)] + (2t-4)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + (2t - 4 + 2)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2(t-1)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2r(t-1) \end{aligned}$$

Tekillik Fonksiyonları

Ödev: Verilen fonksiyonu basamak ve rampa fonksiyonları ile ifade ediniz.

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 8, & 0 < t < 2 \\ 2t + 6, & 2 < t < 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases}$$

$$8u(t) + 2u(t-2) + 2r(t-2) - 18u(t-6) - 2r(t-6).$$

Tekillik Fonksiyonları

Soru: Darbe fonksiyonları içeren aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\int_0^{10} (t^2 + 4t - 2)\delta(t - 2)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - 1)e^{-t}\cos t + \delta(t + 1)e^{-t}\sin t]dt$$

$$\int_0^{10} (t^2 + 4t - 2)\delta(t - 2)\,dt = (t^2 + 4t - 2)\big|_{t=2} = 4 + 8 - 2 = 10$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - 1)e^{-t}\cos t + \delta(t + 1)e^{-t}\sin t]\,dt$$

$$= e^{-t}\cos t\big|_{t=1} + e^{-t}\sin t\big|_{t=-1}$$

$$= e^{-1}\cos 1 + e^{1}\sin(-1) = 0.1988 - 2.2873 = -2.0885$$

Tekillik Fonksiyonları

Ödev: Darbe fonksiyonları içeren aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 5t^2 + 10)\delta(t + 3)\,dt, \qquad \int_{0}^{10} \delta(t - \pi)\cos 3t\,dt$$

$$28, \ -1$$

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad s = \sigma + j\omega$$

Laplace dönüşümü, $f(t)$ fonksiyonunun zaman uzayından $F(s)$ fonksiyonunu veren kompleks s uzayına integral dönüşümüdür.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Soru: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(a) $u(t)$, (b) $e^{-at}u(t)$, $a \geq 0$, and (c) $\delta(t)$.

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} 1e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}(0) + \frac{1}{s}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] =$$

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = e^{-0} = 1$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Ödev: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

$r(t) = tu(t) \quad e^{-at}u(t) \quad e^{-j\omega t}u(t)$

$$1/s^2,\ 1/(s+a),\ 1/(s+j\omega).$$

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Soru: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

$$f(t) = \sin\omega t\, u(t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin\omega t] = \int_0^{\infty} (\sin\omega t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Ödev: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

$$f(t) = 10\cos\omega t\,u(t)$$

$$10s/(s^2 + \omega^2)$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Doğrusallık $\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

Ölçeklendirme $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} f(at) e^{-st}\, dt \qquad x = at,\, dx = a\, dt,$$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} f(x) e^{-x(s/a)} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} f(x) e^{-x(s/a)}\, dx$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Soru: $\mathscr{L}[\sin(\omega t)u(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ise $\mathscr{L}[\sin(2\omega t)u(t)]$ değerini bulunuz

$$\mathcal{L}[\sin 2\omega t u(t)] = \frac{1}{2}\frac{\omega}{(s/2)^2 + \omega^2} = \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zaman ekseninde kayma $$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

Soru: Verilen fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}[\cos\omega(t-a)u(t-a)]$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t\, u(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Frekans Ekseninde Kayma $\qquad \mathcal{L}[e^{-at}f(t)u(t)] = F(s+a)$

Soru: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t\, u(t)] \qquad \mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t\, u(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t\, u(t)] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t\, u(t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\sin\omega t\, u(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos\omega t\, u(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zamana Göre Türev

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}u(t)\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt$$

$$u = e^{-st},\ du = -se^{-st}\, dt$$

$$dv = (df/dt)\, dt = df(t),\ v = f(t).$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}u(t)\right] = f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)[-se^{-st}]\, dt$$

$$= 0 - f(0^-) + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

Zamana Göre Türev $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$

Soru: cos fonksiyonunu kullaranak sin fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \cos\omega t\, u(t)$$

$$f'(t) = -\omega \sin\omega t\, u(t)$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t\, u(t)] = -\frac{1}{\omega}\mathcal{L}[f'(t)] = -\frac{1}{\omega}[sF(s) - f(0^-)]$$

$$= -\frac{1}{\omega}\left(s\frac{s}{s^2+\omega^2} - 1\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Zamana Göre İntegral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_0^t f(x)\,dx\right]e^{-st}\,dt$$

$$u = \int_0^t f(x)\,dx, \qquad du = f(t)\,dt \qquad dv = e^{-st}\,dt, \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \left[\int_0^t f(x)\,dx\right]\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty}\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}f(t)\,dt$$

$t = \infty \qquad e^{-s\infty}$

$t = 0$

$$\frac{1}{s}\int_0^0 f(x)\,dx = 0$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zamana Göre İntegral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Soru: $f(t) = u(t)$ ise $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]$ nedir?

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

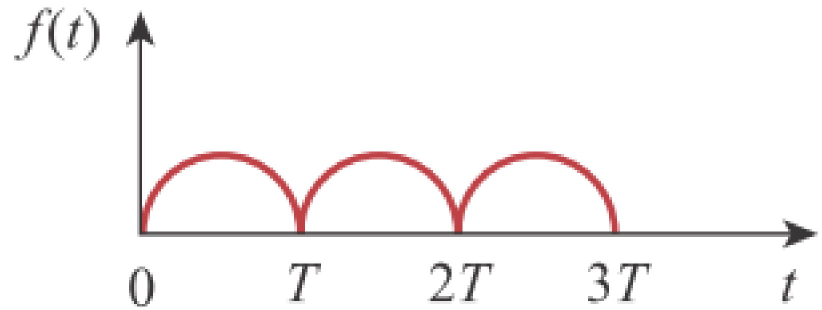
Frekans Türevi

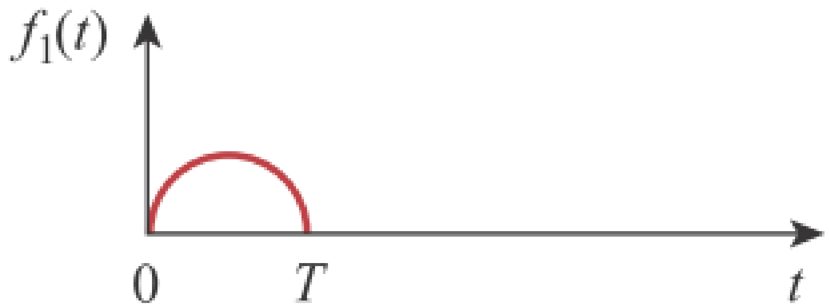
$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

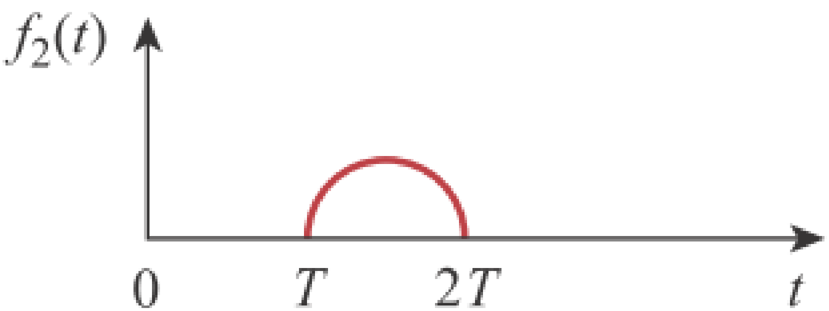
$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-te^{-st})\, dt = \int_{0^-}^{\infty} (-tf(t))e^{-st} dt = \mathcal{L}[-tf(t)]$$

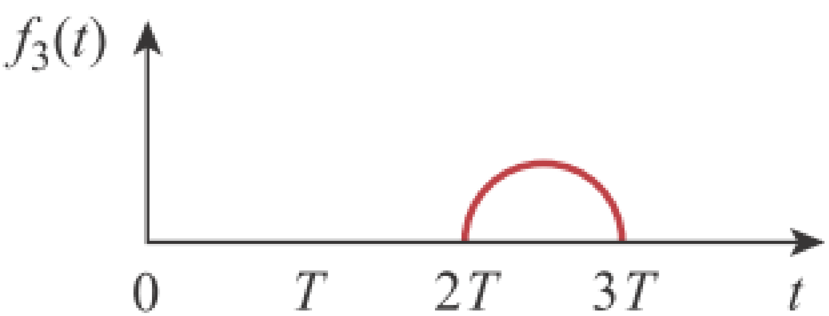
$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Periyodiklik







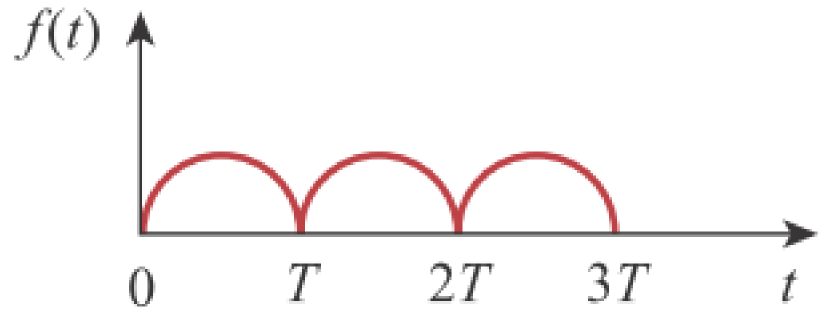


$$
\begin{aligned}
f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \cdots \\
&= f_1(t) + f_1(t-T)u(t-T) \\
&\quad + f_1(t-2T)u(t-2T) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$f_1(t) = f(t)[u(t) - u(t-T)]$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Periyodiklik



$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \cdots$$
$$= f_1(t) + f_1(t - T)u(t - T)$$
$$+ f_1(t - 2T)u(t - 2T) + \cdots$$

$$f_1(t) = f(t)[u(t) - u(t - T)]$$

$$F(s) = F_1(s) + F_1(s)e^{-Ts} + F_1(s)e^{-2Ts} + F_1(s)e^{-3Ts} + \cdots$$
$$= F_1(s)[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \cdots]$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x} \qquad \text{if } |x| < 1.$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

İlk ve Son değer teoremi

$$f(\infty) = \lim_{s \longrightarrow 0} sF(s)$$

$$f(0) = \lim_{s \longrightarrow \infty} sF(s)$$

Soru: İlk değer teoremini kullanarak f(0) değerini bulunuz.

$$f(t) = e^{-2t} \cos 10t$$

$$f(t) = e^{-2t} \cos 10t \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 10^2}$$

$$f(0) = \lim_{s \longrightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 4s + 104}$$

$$= \lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{1 + 2/s}{1 + 4/s + 104/s^2} = 1$$

$f(t)$	$F(s)$
$a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
$\frac{d^nf}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$f(t)$	$F(s)$
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{1}{s}F(s)$
$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$
$f(t)=f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$
$f(0)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\theta)$	$\dfrac{s \sin\theta + \omega \cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\theta)$	$\dfrac{s \cos\theta - \omega \sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Soru: Verilen fonsksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[\delta(t)] + 2\mathcal{L}[u(t)] - 3\mathcal{L}[e^{-2t}u(t)] \\ &= 1 + 2\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+2} = \frac{s^2 + s + 4}{s(s+2)} \end{aligned}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

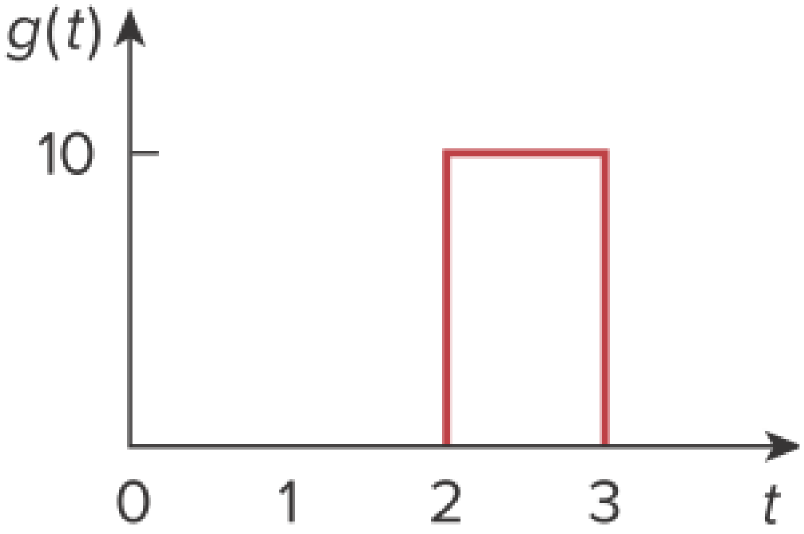
Ödev: Verilen fonsksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = (\cos(3t) + e^{-5t})u(t)$$

$$\frac{2s^2 + 5s + 9}{(s + 5)(s^2 + 9)}.$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

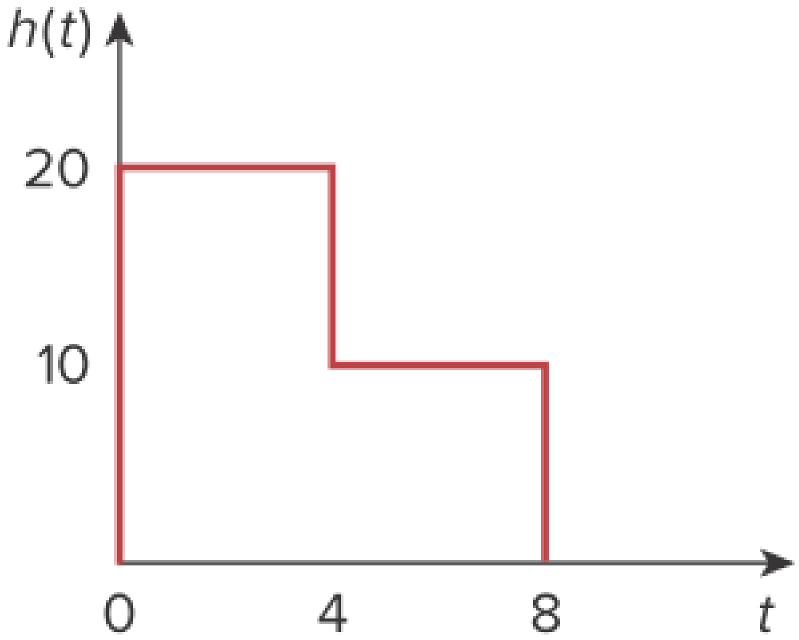
Soru: Grafiği verilen fonsksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.



$$g(t) = 10[u(t-2) - u(t-3)]$$

$$G(s) = 10\left(\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}\right) = \frac{10}{s}(e^{-2s} - e^{-3s})$$

Ödev: Grafiği verilen fonsksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.



$$\frac{10}{s}(2 - e^{-4s} - e^{-8s}).$$

Ters Laplace Dönüşümü

Verilen bir $F(s)$ fonksiyonunun tekrar zaman uzayındaki eşleniğini ($f(t)$) bulmaya ters Laplace dönüşümü denir.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$ ve $D(s)$ birer polinomdur.
$N(s) = 0$ eşitliğinin köklerine $F(s)$'in 0'ları
$D(s) = 0$ eşitliğinin köklerine $F(s)$'in kutupları denir.

Bir Laplace dönüşümünün ters Laplace dönüşümünü elde etmek için:
1. $F(s)$ kısmi kesirlere dönüşecek şekilde sadeleştirilir.
2. Her bir terimin tersi bulunur.

Ters Laplace Dönüşümü

Basit Kutuplar:

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^2+4}\right) \\ &= (3 - 5e^{-t} + 3\sin 2t)u(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = 1 + \frac{3}{s+4} - \frac{5s}{s^2+25}$$

$$\delta(t) + (4e^{-4t} - 5\cos(5t))u(t).$$

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$s = 0$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı s ile çarpılırsa

$$A = sF(s)\,\big|_{s=0} = \frac{s^2 + 12}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=0} = \frac{12}{(2)(3)} = 2$$

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$s = -2$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı $s+2$ ile çarpılırsa

$$B = (s+2)F(s)\,\Big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 12}{s(s+3)}\Bigg|_{s=-2} = \frac{4+12}{(-2)(1)} = -8$$

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$s = -3$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı $s + 3$ ile çarpılırsa

$$C = (s+3)F(s)\,\Big|_{s=-3} = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)}\Bigg|_{s=-3} = \frac{9 + 12}{(-3)(-1)} = 7$$

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+2} + \frac{7}{s+3} \qquad f(t) = (2 - 8e^{-2t} + 7e^{-3t})u(t)$$

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{6(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$f(t) = (e^{-t} + 3e^{-3t} - 4e^{-4t})u(t).$$

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{48(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$f(t) = (8e^{-t} + 24e^{-3t} - 32e^{-4t})u(t).$$

Ters Laplace Dönüşümü

Tekrar eden (katlı) kutuplar:

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2} \end{aligned}$$

Ters Laplace Dönüşümü

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2}$$

$$A = sV(s)\,\Big|_{s=0} = \frac{10s^2+4}{(s+1)(s+2)^2}\,\Bigg|_{s=0} = \frac{4}{(1)(2)^2} = 1$$

$$B = (s+1)V(s)\,\Big|_{s=-1} = \frac{10s^2+4}{s(s+2)^2}\,\Bigg|_{s=-1} = \frac{14}{(-1)(1)^2} = -14$$

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$
$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2}$$

$$C = (s+2)^2 V(s)\,|_{s=-2} = \frac{10s^2+4}{s(s+1)}\bigg|_{s=-2} = \frac{44}{(-2)(-1)} = 22$$

$$D = \frac{d}{ds}[(s+2)^2 V(s)]\bigg|_{s=-2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{10s^2+4}{s^2+s}\right)\bigg|_{s=-2}$$
$$= \frac{(s^2+s)(20s) - (10s^2+4)(2s+1)}{(s^2+s)^2}\bigg|_{s=-2} = \frac{52}{4} = 13$$

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{14}{s+1} + \frac{13}{s+2} + \frac{22}{(s+2)^2}$$

$$v(t) = (1 - 14e^{-t} + 13e^{-2t} + 22te^{-2t})u(t)$$

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s + 6}{s(s+1)^2(s+3)}$$

$$(2 - 3.25e^{-t} - 1.5te^{-t} + 2.25e^{-3t})u(t).$$

Ters Laplace Dönüşümü

Kompleks (karmaşık) kutuplar:

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s^2+8s+25)}$$

$$A = (s+3)H(s)\,\Big|_{s=-3} = \frac{20}{s^2+8s+25}\,\Bigg|_{s=-3} = \frac{20}{10} = 2$$

$$s = 0 \qquad \frac{20}{75} = \frac{A}{3} + \frac{C}{25} \qquad A = 2 \qquad C = -10$$

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s^2+8s+25)}$$

$$s = 1 \quad \frac{20}{(4)(34)} = \frac{A}{4} + \frac{B+C}{34}$$

$$A = 2, C = -10$$

$$20 = 34A + 4B + 4C \qquad B = -2.$$

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s^2+8s+25)}$$

$$A = 2, C = -10 \qquad B = -2.$$

$$H(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{2s+10}{(s^2+8s+25)} = \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)+2}{(s+4)^2+9}$$

$$= \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{2}{3}\frac{3}{(s+4)^2+9}$$

$$h(t) = \left(2e^{-3t} - 2e^{-4t}\cos 3t - \frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t\right)u(t)$$

Ters Laplace Dönüşümü

$$h(t) = \left(2e^{-3t} - 2e^{-4t}\cos 3t - \frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t\right)u(t)$$

$$h(t) = (2e^{-3t} - Re^{-4t}\cos(3t - \theta))u(t)$$

$$R = \sqrt{2^2 + (\tfrac{2}{3})^2} = 2.108, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{2} = 18.43^\circ$$

$$h(t) = (2e^{-3t} - 2.108e^{-4t}\cos(3t - 18.43^\circ))u(t)$$

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+4s+13)}$$

$$e^{-t} - e^{-2t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t, \ t \geq 0.$$

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Soru: v(0)=1 ve v'(0)=-2 ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 6\frac{dv(t)}{dt} + 8v(t) = 2u(t)$$

$$[s^2V(s) - sv(0) - v'(0)] + 6[sV(s) - v(0)] + 8V(s) = \frac{2}{s}$$

$$v(0) = 1, v'(0) = -2,$$

$$s^2V(s) - s + 2 + 6sV(s) - 6 + 8V(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 + 6s + 8)V(s) = s + 4 + \frac{2}{s} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s}$$

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

$$(s^2 + 6s + 8)V(s) = s + 4 + \frac{2}{s} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s}$$

$$V(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s + 2)(s + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 4}$$

$$A = sV(s)\,|_{s=0} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s + 2)(s + 4)}\bigg|_{s=0} = \frac{2}{(2)(4)} = \frac{1}{4}$$

$$B = (s + 2)V(s)\,|_{s=-2} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s + 4)}\bigg|_{s=-2} = \frac{-2}{(-2)(2)} = \frac{1}{2}$$

$$C = (s + 4)V(s)\,|_{s=-4} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s + 2)}\bigg|_{s=-4} = \frac{2}{(-4)(-2)} = \frac{1}{4}$$

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

$$V(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{4}}{s+4}$$

$$v(t) = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-2t} + e^{-4t})u(t)$$

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Ödev: v(0)=v'(0)=-2 ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = e^{-t}$$

$$(2e^{-t} + 4te^{-2t})\,u(t).$$

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Soru: y(0)=2 ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{dy}{dt} + 5y(t) + 6\int_0^t y(\tau)\,d\tau = u(t), \qquad y(0) = 2$$

$$[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) + \frac{6}{s}Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = 1 + 2s$$

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Soru: y(0)=2 ise verilen denklemi çözünüz.

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

$$A = (s + 2)Y(s) \,|_{s=-2} = \left.\frac{2s + 1}{s + 3}\right|_{s=-2} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$B = (s + 3)Y(s) \,|_{s=-3} = \left.\frac{2s + 1}{s + 2}\right|_{s=-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$Y(s) = \frac{-3}{s + 2} + \frac{5}{s + 3} \qquad y(t) = (-3e^{-2t} + 5e^{-3t})u(t)$$

Ödev: y(0)=0 ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 2e^{-3t},$$

$$(-e^{-t} + 4e^{-2t} - 3e^{-3t})u(t).$$